Wielopoziomowe zadania z lusterkiem, czyli kształcenie umiejętności matematycznych i nie tylko

Marek Matejuk*

1 Zadanie nr 26

Uczestnicy pierwszego etapu pierwszej edycji Konkursu Matematyczne Preteksty** (2013/2014) mieli około 60 dni na rozwiązanie 60 zadań (bardzo łatwych, łatwych, trudnych i bardzo trudnych). Jednym z nich było zadanie nr 26 o treści:

„Jakie będzie pole największego obszaru, który można ograniczyć parówkami użytymi do śniadania, jeżeli koniec jednej parówki styka się z końcem innej parówki? Żeby zobaczyć wszystkie te parówki bez użycia lusterka, nie musimy spoglądać za siebie. Pomijamy grubość parówek."

Z tekstu wstępnego (z którego należało wydobyć część informacji niezbędnych do rozwiązywania zadań) oraz odpowiedzi do wcześniejszych zadań (z których część danych była również niezbędna do rozwiązywania późniejszych zadań) wynikało, że chodzi o 12 parówek.

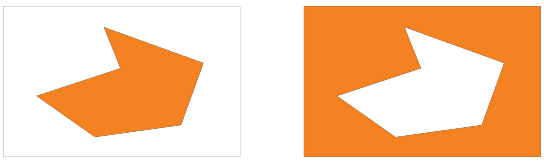
Dodatkowo, między zadaniem nr 9, a zadaniem nr 10, były podane:

„Uwagi do następnych zadań.
Jeżeli w zadaniach nie podano inaczej, to przyjmujemy, że wszystkie parówki są takie same, mają 2 cm średnicy, 18 cm długości, są proste i zakończone półkuliście.
Parówek nie zginamy, nie łamiemy ani nie ucinamy i nie ściskamy, chyba że w zadaniu jest inaczej."

2 Po co to lusterko

Zarówno w czasie pierwszego etapu konkursu, jak i po nim, wiele emocji wzbudzało owo lusterko.

Zazwyczaj, w praktyce szkolnej, kiedy rysuje się kilka odcinków tworzących łamaną zamkniętą, mamy na myśli tylko jeden z obszarów, na który dzieli ona płaszczyznę - ten ograniczony, tworzący wielokąt.



Jednak w miarę inteligenty uczestnik, dostrzegający oba te obszary, może pomyśleć, że z łatwością już znalazł rozwiązanie - to obszar nieogranczony, o nieskończonym polu. I niestety przestanie o tym zadaniu myśleć!

„Obudziłby" się on dopiero kilka

dni przed terminem udzielania odpowiedzi, po otrzymaniu Karty odpowiedzi, w której należało wybrać liczbę, jako odpowiedź do zadania nr 26 (liczba to wszak nie nieskończoność). A chciałem mu tego zaoszczędzić i zaprosić go do dłuższej zabawy matematycznej.

Ponieważ zadanie nr 26, jak większość zadań konkursu, daje się rozwiązywać przez uczniów z wielu różnych poziomów edukacyjnych, to długo zastanawiałem się, jak zaznaczyć, że interesuje mnie obszar ograniczony, ale zrobić to bez żadnych formalizmów, odstraszających już na wstępie uczniów młodszych.

I pojawiło się ... lusterko!

Bardzo mnie to ucieszyło, bo nie tylko osiągnąłem efekt, o który mi chodziło, ale również treść zadania okazała się dużo bardziej interesująca - żeby rozwiązać problem geometryczny, należało najpierw sprawdzić swoją umiejętność czytania ze zrozumieniem i rozwiązać zagadkę logiczną.

Przy okazji jej rozwiązywania, uczestnicy dobitnie (i prawdopodobnie trwale) zdawali sobie sprawę, że łamana zamknieta nie wyznacza tylko jednej części płaszczyzny.

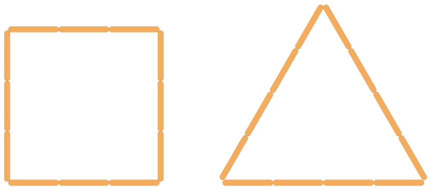
3 Największy obszar

Podczas pracy z uczniami w ramach Pretekstowych Kółek Matematycznych, poświęconych rozwiązywaniu archiwalnych zadań konkursu, zdałem sobie sprawę, że nie tylko niektórzy uczniowie szkoły podstawowej nie wiedzą, jaki kształt ma wielokąt o największym polu, który można ułożyć z dwunastu odcinków o takiej samej długości.

Ponieważ podstawową metodą pracy z zadaniami konkursu jest metoda badawcza, to badaliśmy tę sytuację, zdecydowanie odrzucając zasadę, że jak czegoś nie wiem od razu, to się tym dalej nie zajmuję.

W zależności od wieku i poziomu umiejętności matematycznych uczestników kółka, taka praca szła szybciej lub wolniej oraz miała mniej lub więcej etapów. A jak się można domyślić, najwięcej matematycznej radości dostarczali najmłodsi uczestnicy - bo i zabawa była zazwyczaj najdłuższa, i jednocześnie najczęściej miała najwięcej etapów.

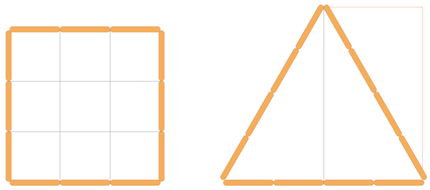
Wśród uczestników kółka, którzy nie wiedzieli, że chodzi o dwunastokąt foremny, bardzo często na początku pojawiały się kwadraty i trójkąty równoboczne (idea foremności gdzieś się jednak tliła). Czasami pojawiały się też prostokąty różnoboczne, ale bardzo szybko „znikały” z przyczyn „technicznych”, po porównaniu z kwadratem.



Uczestnicy wiedzący, jak obliczyć pole kwadratu i pole trójkąta równobocznego nie mieli problemów z określeniem, który z wielokątów foremnych o tym samym obwodzie: 3-bok czy 4-bok, ma większe pole.

Co jednak z tymi, którzy nie potrafili tego policzyć?
Zauważaliśmy wtedy, że kwadrat da się podzielić na 9 kwadracików o boku jednej parówki - łatwi-

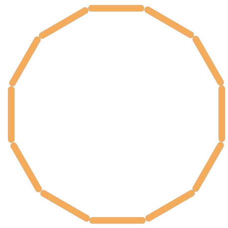
zna. Potem jednak trzeba było poradzić sobie z trójkątem równobocznym, więc ... „przecięliśmy go na pół" (wzdłuż wysokości) i złożyliśmy z niego prostokąt, którego przekątną był bok tego trójkąta.



Krótszy bok tego prostokąta miał długość dwóch parówek, a dłuższy bok był na pewno krótszy, niż przekątna, czyli 4 parówki, więc zmieściłoby się w nim mniej, niż 8 kwadracików o boku jednej parówki. I już!

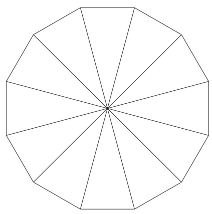
Oczywiście potem pojawiały się sześciokąty foremne, których pola jedni obliczali, a inni szacowali, podobnie jak w przypadku trójkąta równobocznego.

W konsekwencji, finalnie pojawiał się, prędzej czy później, dwunastokąt foremny.



4 Rozwiązania

Rozwiązanie nr 1.



Prawdopodobnie najszybciej i najłatwiej rozwiąże to zadanie uczeń znający twierdzenie cosinusów, który chce skorzystać z dobrodziejstw kąta o mierze $30°$ i który podzieli ten dwunastokąt na 12 przystających trójkątów równoramiennych, o najkrótszym boku długości 18 cm i dłuższych bokach długości r oraz kącie między nimi o mierze ... właśnie $30°$ (korzystanie z elementarych definicji proporcji trygonometrycznych dla kąta $15°$ wiązałoby się z dodatkowym wysiłkiem policzenia np. tg$15°$, a dodatkowo, uczestnik może jeszcze nie znać funkcji trygonometrycznych połowy kąta).

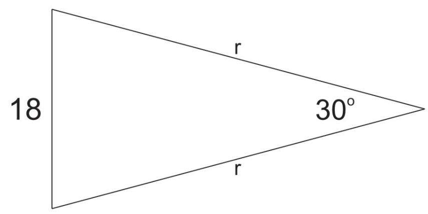
Być może policzy on pole takiego trójkąta tak:

$18^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot cos30°$

$324 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$324 = 2r^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$

$r^2 = \frac{324}{2-\sqrt{3}}$



i teraz, w miarę inteligentny uczeń, przewidując swój kolejny ruch, powstrzyma swój „odruch szkolny" i nie będzie liczył wartości r, bo pole naszego trójkąta to wszak

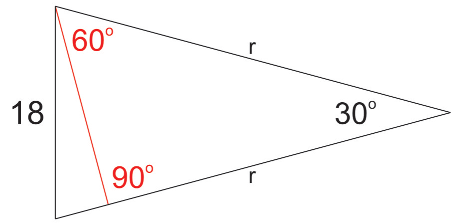
$\frac{1}{2}r^2 sin30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{324}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{2-\sqrt{3}}$,

a więc pole naszego dwunastokąta to $\frac{972}{2-\sqrt{3}}$ cm^2 lub $972(2 + \sqrt{3})$ cm^2.

Rozwiązanie nr 2.

Co ma zrobić uczeń, który nie zna twierdzenia cosinusów?
Oczywiście próbować rozwiązać zadanie inaczej.

Może on zauważyć, że wysokość wspomnianego trójkąta, opuszczona z wierzchołka większego kąta, dzieli ten trójkąt na dwa mniejsze trójkąty prostokątne: połowę trójkata równobocznego o boku r i trójkąt o kątach ostrych $75°$ i $15°$.



Gdyby znał on funkcje trygonometryczne sumy lub różnicy dwóch kątów, to zadanie byłoby proste, bo

$\frac{\frac{r}{2}}{18}$ to $sin 75°$ albo $cos 15°$.

Policzyłby on wówczas $\frac{r}{2}$, czyli także r, a więc miałby długość podstawy naszego trójkąta i wysokości opuszczonej na tę podstawę - do pola tylko jeden krok. Skoro jednak nie zna on twierdzenia cosinusów, to prawdopodobnie nie zna również funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy dwóch kątów. Pozostaje więc jedno - twierdzenie Pitagorasa.

W trójkącie o przeciwprostokątnej długości 18 cm, długość krótszej przyprostokątnej jest różnicą r i wysokości trójkąta równobocznego o boku r, czyli jest równa $r - r\frac{\sqrt{3}}{2}$, a długość dłuższej przyprostokątnej to $\frac{r}{2}$.

Mogłoby to więc wyglądać tak:

$18^2 = (\frac{r}{2})^2 + (r - r\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$324 = \frac{r^2}{4} + r^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$

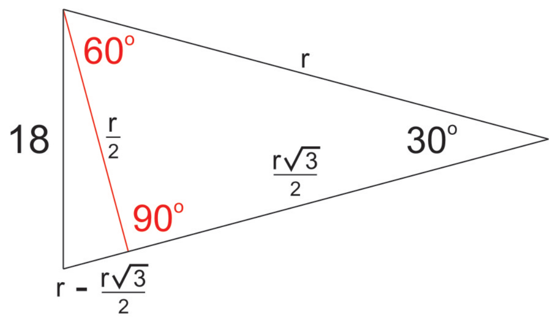
$324 = \frac{r^2}{4} + \frac{r^2(2-\sqrt{3})^2}{4}$

$1296 = r^2 + r^2(7 - 4\sqrt{3})$

$1296 = r^2(8 - 4\sqrt{3})$

$1296 = 4r^2(2 - \sqrt{3})$

$r^2 = \frac{324}{2-\sqrt{3}}$



i teraz, w miarę inteligentny uczeń, przewidując swój kolejny ruch, powstrzyma swój „odruch szkolny” i nie będzie liczył wartości r, bo pole naszego trójkąta to wszak

$\frac{r \cdot \frac{r}{2}}{2}$, czyli $\frac{r^2}{4}$, a to daje $\frac{81}{2-\sqrt{3}}$,

a więc pole naszego dwunastokąta to $\frac{972}{2-\sqrt{3}}\ cm^2$ lub $972(2 + \sqrt{3})\ cm^2$.

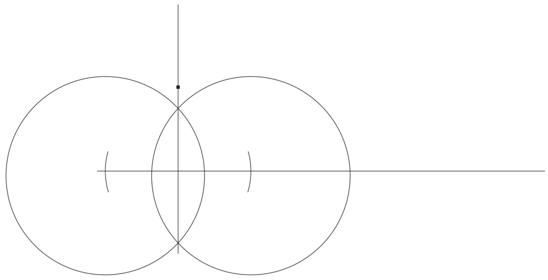
Rozwiązanie nr 3.

A co ma zrobić uczeń, który nie zna ani twierdzenia Pitagorasa, ani tym bardziej twierdzenia cosinusów, ani funkcji trygonometrycznych sumy lub różnicy dwóch kątów, ale bardzo mu zależy na rozwiązaniu tego zadania i zajęciu jak najlepszego miejsca w Konkursie Matematyczne Preteksty? Oczywiście powinien próbować rozwiązać zadanie jeszcze inaczej.

Jeśli jest on bardzo zawzięty, to może próbować przynajmniej jak najbardziej zbliżyć się do poprawnego wyniku. A żeby tak było, to może on zrobić ... jak najdokładniejszy model naszego trójkąta! A właściwie - tylko jego połowy (cięcie wzdłuż dłuższej wysokości).

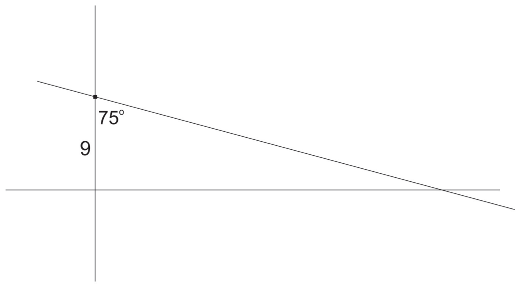
Przy czym powinien już także zdawać sobie sprawę, że raczej nie otrzyma dokładnych odpowiedzi (!), a w treści zadania nie ma mowy o przybliżeniach (jednak nie wszystko da się „przeskoczyć” w zadaniach konkursu).

Najlepiej dla jego kształcenia byłoby, gdyby nie dysponował on programem komputerowym do wykonywania takich konstrukcji i ich mierzenia, tylko zrobił ją ręcznie, na papierze, z użyciem jedynie ołówka, dokładnej linijki i precyzyjnego cyrkla. Wszak konstrukcja jest bardzo prosta i być może mogłaby wyglądać tak:



1) na papierze formatu większego niż A4 (po pierwszej próbie rysunku na A4, na pewno szybko zmieni papier), skonstruuje kąt prosty (jeśli skala ma wynosić 1:1 - chyba najlepiej),

2) na jednym z ramion tego kąta prostego, jak najdokładniej odmierzy 9 cm od jego wierzchołka i zaznaczy tam punkt,



3) skonstruuje kąt o mierze $75°$ ($60°$ + jedna jego ćwiartka, najlepiej łukami okręgów o jak największych promieniach) tak, żeby ten zaznaczony ostatnio punkt był jego wierzchołkiem, a jedno z ramion zawierało wspomniany odcinek o długości 9 cm,

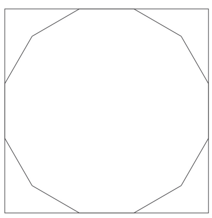
4) jak najstaranniej przedłuży ramię tego kąta, nie zawierające odcinka o długości 9 cm tak, żeby przecięło ramię kąta prostego - tworząc trójkąt, który powinien być prostokątny i mieć kąty ostre o miarach $75°$ i $15°$.

Teraz przybliżone pole naszego trójkąta (dwunastej części naszego dwunastokąta) zależy od dokładności powyższej konstrukcji i odczytu długości drugiej przyprostokątnej powyższego trójkąta prostokątnego i jest iloczynem tej długości i 9 cm.

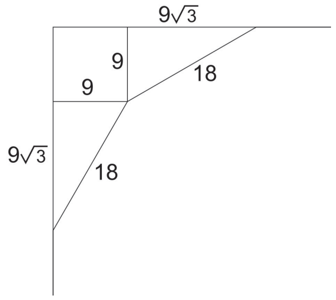
Rozwiązanie nr 4.

Nie wiem, jak rozwiązują zadania uczestnicy konkursu, bo spływają do nas tylko ich odpowiedzi, ale wiem, jak rozwiązują je uczestnicy ogólnopolskich Pretekstowych Kółek Matematycznych, bo sam te kółka prowadzę.

Najczęstszym sposobem rozwiązywania zadania nr 26 jest badanie wspomnianego wyżej trójkąta równoramiennego, którego pole jest 12 razy mniejsze, niż pole naszego dwunastokąta. Na razie nie dane mi było usłyszeć od uczestników kółek innego, zupełnie banalnego rozwiązania, do którego potrzeba jedynie wysokości trójkąta równobocznego - prezentuję to rozwiązanie poniżej.



Nasz dwunastokąt foremny wpisujemy w jak najmniejszy kwadrat, który go zawiera. Pole dwunastokąta to różnica pola tego kwadratu i sumy pól czterech jego „naroży”.



Każde takie „naroże” to kwadrat o boku 9 cm i dwie połowy trójkąta równobocznego o boku 18 cm.

Dzięki tej obserwacji wiemy, że:

1) suma pól czterech takich „naroży” to $4(9^2 + \frac{18^2\sqrt{3}}{4})$, czyli $4(81 + 81\sqrt{3}) = 324(1 + \sqrt{3})\ cm^2$,

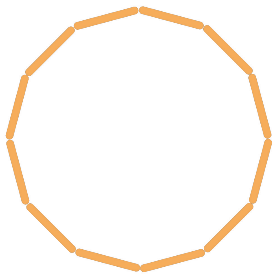
2) połowa boku tego kwadratu ma długość $9 + \frac{18\sqrt{3}}{2} + 9$, czyli $9(2 + \sqrt{3})$, a więc cały bok ma długość $18(2 + \sqrt{3})$,
czyli pole kwadratu to $18^2(2 + \sqrt{3})^2 = 324(7 + 4\sqrt{3})\ cm^2$.

Pole naszego dwunastokąta to zatem
$324(7 + 4\sqrt{3}) - 324(1 + \sqrt{3}) = 324(6 + 3\sqrt{3}) = 972(2 + \sqrt{3})\ cm^2$.

5 Zadanie nr 27

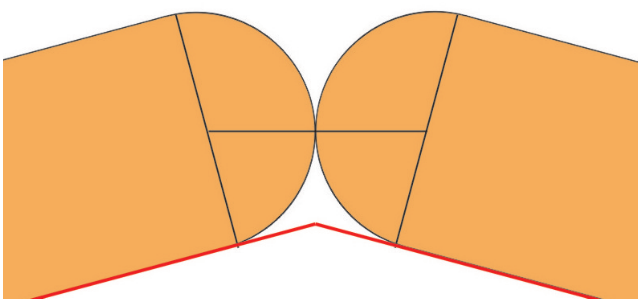
Następne zadanie 1. etapu pierwszej edycji Konkursu Matematyczne Preteksty było takie:

„Jakie będzie pole największego obszaru, który można ograniczyć parówkami użytymi do śniadania, jeżeli koniec jednej parówki styka się z końcem innej parówki? Żeby zobaczyć wszystkie te parówki bez użycia lusterka, nie musimy spoglądać za siebie.”



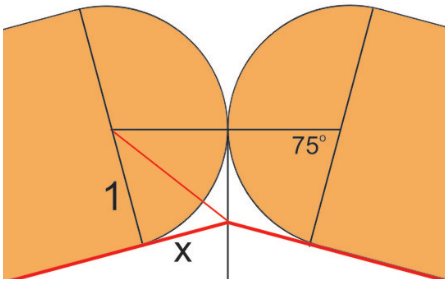
Po pierwsze, wiadomo, że - jak to zwykle w takich przypadkach bywa - chodzi o rzut prostokątny na płaszczyznę rzeczywistego ułożenia parówek (walców, zakończonych półkulami), bo inaczej żadne lusterko nie pozwoli na wyznaczenie obszaru ograniczonego.

Po drugie, już na pierwszy rzut oka widać, że sprawa jest zdecydowanie bardziej skomplikowana, niż poprzednio. Oczywiście nadal układamy z parówek kształt jak najbardziej przypominający dwunastokąt, ale cały problem tkwi w miejscu ich łączenia się.



Podobnie jak poprzednio, najczęstszym rozwiązaniem przedstawianym przez uczestników ogólnopolskich Pretekstowych Kółek Matematycznych był podział tej figury na dwanaście trójkątów równoramiennych i dwanaście „miniobszarów” występujących przy punktach styku parówek.

Do policzenia pola jednego takiego trójkąta potrzebujemy długości jego krótszego boku, a do policzenia pola „miniobszaru” potrzebujemy pola trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości 1, leżącej przy kącie o mierze $37,5^\circ$. Oba te problemy rozwiąże poznanie wartości liczby x.



Sprawa jest łatwa, bo $\frac{x}{1} = tg37,5^\circ$, czyli $x = tg37,5^\circ$ i już! Szkopuł jest jednak taki, że nadal w treści zadania nie ma mowy o przybliżeniach, więc trzeba policzyć dokładną wartość $tg37,5^\circ$.

Wiadomo, że $tg37,5^\circ = tg\frac{75^\circ}{2} = \frac{1-cos75^\circ}{sin75^\circ}$, a więc potrzebujemy dokładnych wartości $cos75^\circ$ i $sin75^\circ$.

$cos75^\circ = cos(45^\circ + 30^\circ) = cos45^\circ \cdot cos30^\circ - sin45^\circ \cdot sin30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

$sin75^\circ = sin(45^\circ + 30^\circ) = sin45^\circ \cdot cos30^\circ + cos45^\circ \cdot sin30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

Kontynuując, $tg37,5^\circ = \frac{1-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{4-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{4-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} =$

$= \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)-2(4-2\sqrt{3})}{2(3-1)} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)-4(2-\sqrt{3})}{4} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) - 2 + \sqrt{3} = \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{3} =$

$= \sqrt{3}(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(1+\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = x.$

Krótszy bok naszego trójkąta równoramiennego („$\frac{1}{12}$” naszego dwunastokąta) ma więc długość $16 + 2x = 16 + 2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ cm$.

Jednak w każdym z pierwszych dwóch rozwiązań zadania nr 26, których tropem będziemy podążali, potrzebny jest kwadrat tej długości, więc musimy go policzyć:

$[16 + 2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^2 = 16^2 + 64(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 4(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 =$

$= 256 + 64(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 4(3+2\sqrt{2})(7-2\sqrt{6}) =$

$= 256 + 64\sqrt{6} - 128 + 64\sqrt{3} - 64\sqrt{2} + 84 - 24\sqrt{6} + 56\sqrt{2} - 16\sqrt{12} =$

$= 212 + 40\sqrt{6} + 32\sqrt{3} - 8\sqrt{2} = 4(53 + 10\sqrt{6} + 8\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\ .$

Teraz, biorąc pod uwagę np. trzeci wiersz równania z rozwiązania nr 1 zadania nr 26, mamy:

$4(53 + 10\sqrt{6} + 8\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) = 2r^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}),$

czyli $r^2 = \frac{4(53+10\sqrt{6}+8\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{2-\sqrt{3}} = \frac{4(53+10\sqrt{6}+8\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$

$= 4(53 + 10\sqrt{6} + 8\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(2+\sqrt{3}) = 4(130 + 18\sqrt{6} + 69\sqrt{3} + 26\sqrt{2})\ .$

Pole naszego trójkąta to $\frac{1}{2}r^2 sin30^\circ = \frac{1}{4}r^2 = 130 + 18\sqrt{6} + 69\sqrt{3} + 26\sqrt{2}\ cm^2$, czyli pole naszego dwunastokąta to $12(130 + 18\sqrt{6} + 69\sqrt{3} + 26\sqrt{2})\ cm^2$.

Teraz kolej na pole jednego „miniobszaru”, które policzymy jako różnicę sumy pól czterech trójkątów prostokątnych, o przyprostokątnych długości 1 i x oraz sumy pól dwóch wycinków kołowych wyznaczonych przez kąty środkowe o miarach po $75°$, czyli jednego wycinka wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze $150°$.

Pole jednego takiego trójkąta to $\frac{1 \cdot x}{2} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$, a więc pole czterech takich trójkątów to $2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Pole wycinka koła o promieniu 1 utworzonego przez kąt środkowy o mierze $150°$ to $\frac{150°}{360°} \cdot \pi 1^2 = \frac{5}{12}\pi$.

Pole jednego „miniobszaru" to więc $2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - \frac{5}{12}\pi$, czyli suma pól dwunastu „miniobszarów" to $24(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - 5\pi\ cm^2$.

Odpowiedź do zadania to suma pola dwunastokąta i dwunastu „miniobszarów":

$$12(130 + 18\sqrt{6} + 69\sqrt{3} + 26\sqrt{2}) + 24(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - 5\pi =$$

$$= 1560 + 216\sqrt{6} + 828\sqrt{3} + 312\sqrt{2} + 24\sqrt{6} + 24\sqrt{3} - 24\sqrt{2} - 48 - 5\pi =$$

$$= 1512 + 240\sqrt{6} + 852\sqrt{3} + 288\sqrt{2} - 5\pi\ cm^2\ .$$

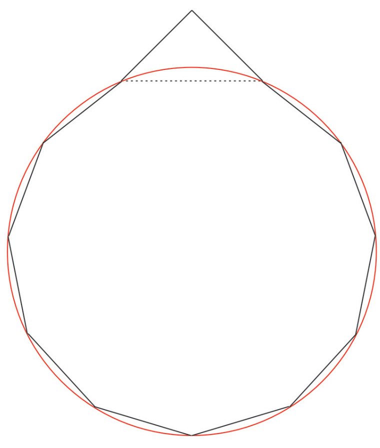
Rozwiązanie tego zadania innymi sposobami pozostawiam już Tobie, Szanowny Czytelniku, i życzę Ci miłej zabawy matematycznej. ☺

6 Zadanie nr 28

„Jakie będzie pole największego obszaru, który można ograniczyć parówkami użytymi do śniadania, jeżeli koniec jednej parówki styka się z końcem innej parówki? Dokładnie dwie sąsiednie parówki są ułożone prostopadle. Żeby zobaczyć wszystkie te parówki bez użycia lusterka nie musimy spoglądać za siebie. Pomijamy grubość parówek."

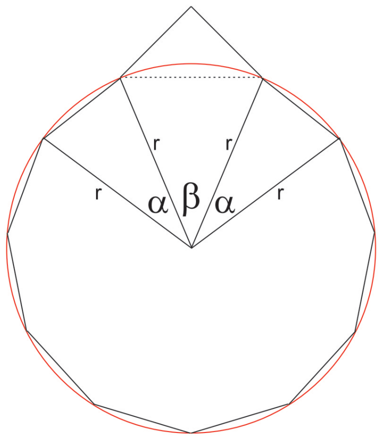
To trzecie zadanie z cyklu tych, które mają wspólną genezę, a różnice w treści są bardzo niewielkie. Dzisiaj ktoś mógłby je określić modnym ostatnio mianem „wiązki zadań", choć pierwszy raz pojawiły się one w Konkursie Matematyczne Preteksty w 2013 roku, czyli na długo (ładnych kilka lat) przed pojawieniem się tzw. „wiązek zadań" na Maturze. Od zadań maturalnych różnią się stopniem trudności.

Już na pierwszy rzut oka widać, że skala trudności znacznie wzrosła, w porównaniu do dwóch poprzednich zadań (pomimo pominięcia grubości parówek). Uważny uczestnik, który wie, że wielokąt ograniczony o największym polu to ten, który jak najbardziej „przypomina" koło, prędzej, czy później, narysuje taką figurę:

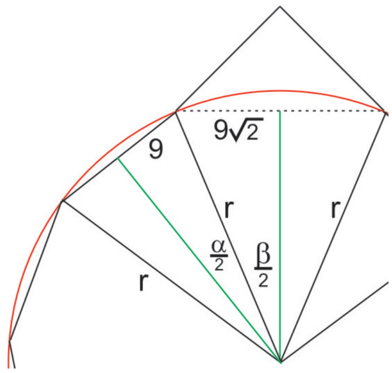


I tu „zaczynają się schody", bo o ile obliczenie pola wystającego „rożka" jest banalne, o tyle obliczenie pola wielokąta wpisanego w okrąg już takie łatwe nie jest, bo ów wielokąt nie jest foremny.

Gdybyśmy chcieli podzielić go na jedenaście trójkątów równoramienych, to byłyby ich dwa rodzaje: dziesięć trójkątów o najmniejszym kącie miary α i jeden trójkąt o najmniejszym kącie miary β, przy czym $\alpha < \beta$ i $10\alpha + \beta = 360°$ (rysunek z prawej). Wiadomo, że do rozwiązania potrzebujemy: α, β i r, więc szukajmy związków między nimi.



Poprowadźmy najdłuższe wysokości w dwóch (może sąsiadujących?) trójkątach równoramiennych o różnych kątach (rysunek poniżej). Wówczas $\frac{9}{r} = sin\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{9\sqrt{2}}{r} = sin\frac{\beta}{2}$, czyli $\frac{9}{sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{sin\frac{\beta}{2}} \Leftrightarrow$ $sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{2}sin\frac{\alpha}{2}$,



czyli $sin\frac{360°-10\alpha}{2} = \sqrt{2}sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow sin(180° - 5\alpha) = \sqrt{2}sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow sin(5\alpha) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sin(5\alpha) = \sqrt{1 - cos\alpha} \Leftrightarrow sin^2(5\alpha) = 1 - cos\alpha \Leftrightarrow 1 - cos^2(5\alpha) = 1 - cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cos\alpha = cos^2(5\alpha) = cos^2(2\alpha + 3\alpha) = (cos2\alpha \cdot cos3\alpha - sin2\alpha \cdot sin3\alpha)^2$.

Następnie, przez kilka miłych „chwil” przekształcając prawą stronę tego równania (pozwolę sobie nie cytować tych przekształceń, bo niniejsza publikacja znacznie zwiększyłaby swoją objętość), a potem dokonując pewnych operacji na obu jego stronach (również pozwolę sobie nie cytować tych operacji, z wcześniej wymienionego powodu), otrzymałem sympatyczny efekt:

$$256cos^9\alpha - 640cos^7\alpha + 560cos^5\alpha - 200cos^3\alpha + 25cos\alpha - 1 = 0 .$$

Do znalezienia przybliżonych wartości $cos\alpha$ wystarczy zwykły arkusz kalkulacyjny. Należy więc wszystkie wielkości potrzebne do obliczenia pól oraz same pola wyrazić przy pomocy tegoż $cos\alpha$ i już!

Na razie nie dane mi było poznać innych rozwiązań tego zadania.

Również żaden uczestnik 1. etapu I. edycji Konkursu Matematyczne Preteksty nie podał jego poprawnego rozwiązania (należało to zrobić z dokładnością do zaledwie dwóch miejsc po przecinku).

7 Kształcenie umiejętności matematycznych i nie tylko

1.

Treści zadań Konkursu Matematyczne Preteksty podawane są wyłącznie słownie, bez dodatkowych rysunków*** - nie tak, jak to bywa bardzo często w podręcznikach i zbiorach zadań (czy zeszytach ćwiczeń). Zmusza to uczestnika do wykazania się: umiejętnością czytania ze zrozumieniem, rozumowaniem logicznym i wyobraźnią.

2.

Część informacji potrzebnych do rozwiązania zadań jest zawarta/ukryta w tekście wstępnym (tutaj nie cytowanym), co dodatkowo wymaga umiejętności wyszukiwania informacji: czytania ze zrozumieniem, spostrzegawczości, kojarzenia faktów i rozumowania logicznego.

3.

Bardzo często, szczególnie przy rozwiązywaniu nietypowych problemów (a jest ich mnóstwo), uczestnicy muszą uruchomić procesy badawcze (np. odkryć kształt wielokąta ograniczonego o największym polu, przy jego stałym obwodzie). Kształci to matematyczną „wolę walki”, nie poddawania się w trudnościach i „chwytanie byka za rogi” - umiejętności bezcenne nie tylko w przypadku edukacji matematycznej. Kilkadziesiąt dni na rozwiązywanie zadań jest więc jak najbardziej pożądane.

4.

Zadania konkursu nie są przypisywane konkretnym poziomom edukacyjnym uczestników. Jak widać wyżej, większość zadań może być (często różnymi sposobami) rozwiązana przez uczestników w różnym wieku i z różnym zasobem wiedzy matematycznej - liczą się przede wszystkim matematyczne umiejętności. Czasami wśród trójki najlepszych uczestników konkursu (bez względu na klasyfikację w ramach kategorii konkursowych), obok uczniów szkół ponadpodstawowych znajdywali się uczniowie szkół podstawowych.

Dodatkową zaletą takiej sytuacji wielopoziomowego przeznaczenia zadań konkursu, przy jednoczesnym braku formalizmów w ich treści, są próby rozwiązywania prawie wszystkich zadań przez sporą część uczestników w różnym wieku. Każda taka próba rozwija uczestnika i kształci jego umiejętności matematyczne.

Prawdopodobnie w przeciwnym przypadku takich prób byłoby zdecydowanie mniej, bo np. uczeń 8 klasy szkoły podstawowej mógłby „odpuścić sobie” zadanie dla ucznia 2 klasy szkoły ponadpodstawowej, być może nawet nie czytając jego treści.

5.

Do takich, właśnie wspomnianych prób, zmusza także to, że zadania nie są ułożone zgodnie z rosnącym stopniem ich trudności. Po zadaniu trudnym można więc spotkać zadanie łatwe lub bardzo łatwe (np. dla przedszkolaków, bo jest również i taka kategoria konkursowa, przy czym oni pracują razem z rodzicami).

Uczestnicy szukający najpierw zadań łatwiejszych, co jest zupełnie naturalne, muszą przeczytać treści wszystkich zadań. A wiadomo, że wówczas odbywa się też przynajmniej ich wstępna analiza - uruchamiamy wyobraźnię, logikę, kojarzymy wstępne fakty itp.

„Przy okazji” tworzony jest, bardziej lub mniej świadomie (a może zupełnie podświadomie), plan rozwiązywania zadań. Jest to ponownie umiejętność bezcenna nie tylko w matematyce.

6.

Sporej części zadań Konkursu Matematyczne Preteksty nie da się rozwiązać „z biegu”. Najczęściej wymagają one wspomnianego wcześniej procesu badawczego - dłuższego lub krótszego i łatwiejszego lub trudniejszego. Właśnie dlatego uczestnicy mają kilkadziesiąt dni na ich rozwiązywanie.

Taki sposób pracy wymusza na uczestniku pełną koncentrację uwagi i utrzymywanie jej do kiedy tylko może, albo do kiedy jest to konieczne. Częste wykonywanie takich procesów (a zadań jest zawsze co najmniej kilkadziesiąt) znacznie polepsza funkcjonowanie mózgu i przygotowuje do pracy nad złożonymi i dłuższymi problemami - nie tylko matematycznymi.

7.

Zazwyczaj większość zadań konkursu dotyczy sytuacji wziętych z życia, najczęściej bliskich uczestnikom. Przy czym nie są to sztucznie tworzone sytuacje typu „Pani Ania kupiła 13 pączków, a pani Basia dwa razy więcej ...” lub „Pan Jan założył lokatę w banku ...”. Tekst wstępny tworzy konkretną przestrzeń, do której „wchodzi” uczestnik i w niej się porusza. Oczywiście każdy nakłada na ten opis własne wyobrażenia, ale to tym bardziej wiąże go emocjonalnie z przedstawioną sytuacją i wówczas staje się ona bardzo bliska uczestnikowi.

Efekt obcowania z przestrzenią, w której rozgrywa się konkursowa aktywność matematyczna jest taki, że zaangażowany uczestnik może zacząć dużo lepiej dostrzegać matematykę w swoim codziennym życiu. W przypadku pierwszej edycji konkursu wystarczy, że pójdzie do sklepu kupować ... parówki! Wspomnienia zadań konkursowych mogą wtedy uruchomić procesy analizy i kojarzenia faktów np. przy sklepowej ladzie z wędlinami. Uruchamiane są procesy myślenia matematycznego w normalnym życiu uczestnika, jako pokłosie zadań konkursowych.

8.

Czas zabawy zadaniami Konkursu Matematyczne Preteksty ma również niebagatelne znaczenie. Wspomniane już wcześniej kilkadziesiąt dni na rozwiązywanie zadań powoduje, że uczestnik przez długi czas jest aktywny matematycznie. Oczywistą oczywistością jest to, że takie długotrwałe oddziaływanie dużo bardziej rozwija umiejętności matematyczne zaangażowanego uczestnika,
niż inne, krótkotrwałe bodźce.

9.

W sporej części zadań konkursu, dane (długości odcinków, miary kątów itp.) nie są dobierane tak „prosto, ładnie i miło”, jak w podręcznikach lub zbiorach zadań. Biorąc też pod uwagę to, że nie zawsze akceptowane są odpowiedzi przybliżone, takie sytuacje wymuszają na uczestnikach wykazanie się także zwykłą, techniczną umiejętnością liczenia, przekształcania wyrażeń arytmetycznych lub algebraicznych, stosowania wzorów itp.

A nawet, jeśli akceptowana jest przybliżona odpowiedź do zadania, to zazwyczaj musi to być dość dokładne przybliżenie. A takie przybliżenia wykonuje się tylko na końcu obliczeń, więc uczestnik i tak musi wykazać się wspomianymi wyżej umiejętnościami „techniczymi”.

10.

Teraz jest miejsce na to „i nie tylko” z tytułu tej sekcji. ⌣̈

Bardzo często tematem tekstu wstępnego jest rodzina, zwłaszcza wielodzietna. Choć rzeczywiste powody są dużo ważniejsze, to jednak przy okazji jest to też konkretny, bardzo pragmatyczny ukłon w stronę koleżanek i kolegów, zajmujących się wychowywaniem i kształceniem dzieci i młodzieży - troska o możliwość wykonywania pracy.

Sprawa jest banalna i oczywista - jeśli będzie mało dzieci, to w końcu będzie mało pracy dla tych, którzy mają wychowywać i uczyć.

11.

Inne „i nie tylko” dotyczy możliwości (?konieczności?) rozwiązywania zadań razem z rodzicami, uczestników z kategorii konkursowych: SP0, SP1, SP2 i SP3. Trzeba im czytać i wyjaśniać teksty wstępne i treści zadań oraz wspierać przy rozwiązywaniu.

Oprócz zaspokajania podstawowych potrzeb, dzieci, zwłaszcza te najmłodsze, potrzebują przede wszystkim ... miłości rodziców (zresztą chyba nie tylko dzieci i nie tylko rodziców).
A jak wiadomo, jednym z jej przejawów jest poświęcany dzieciom czas - na czytanie książek, zabawy itd. oraz ... wspólną zabawę zadaniami Konkursu Matematyczne Preteksty. Zwłaszcza, że zazwyczaj nie są one łatwe i najmłodsi uczestnicy tym bardziej doceniają wsparcie rodziców, kiedy mają problemy do rozwiązania.

8 Zastosowania

1.
Pretekstowe Kółka Matematyczne (PKM) to najlepszy sposób na kształcenie umiejętności matematycznych przy pomocy zadań Konkursu Matematyczne Preteksty.

To systematyczne, cotygodniowe spotkania poświęcone rozwiązywaniu archiwalnych zadań konkursu. Każdy uczestnik pracuje samodzielnie między spotkaniami, a w czasie kółka omawiane są efekty tej pracy - jedni uczą się od innych. Taka właśnie sytuacja jest szczególnie ważna dla uczniów słabszych matematycznie, bo choć początkowo mogą mieć kłopoty z rozwiązywaniem zadań konkursowych, to obserwując sposoby lepszych kolegów, rozwijają swoje umiejętności matematyczne.

W czasie lekcji w szkole, nauczyciel tak samo przekazuje wszystkim uczniom wiedzę i używa języka matematyki. Jednak nie wszyscy uczniowie potrafią ich potem używać tak samo efektywnie. Różnią ich właśnie posiadane umiejętności matematyczne, czyli wykorzystywanie tej wiedzy i języka do rozwiązywania problemów.

Sposób myślenia i pracy, kształcony w ramach Pretekstowych Kółek Matematycznych, umożliwia uczestnikom rozwiązywanie nietypowych zadań, co jest szczególnie ważne na Egzaminie ósmoklasisty lub na Maturze. O ile do bieżących sprawdzianów uczniowie zazwyczaj mogą się stosunkowo łatwo przygotować (być może jednym z wyjątków byli moi uczniowie, którym prawie zawsze sam wymyślałem - niekoniecznie typowe - zadania na sprawdziany, więc byli najczęściej zaskakiwani, czego skutkiem ubocznym były różne stosunki między nami, ale za to efekt końcowy na Maturze był bardzo sympatyczny), o tyle Egzamin ósmoklasisty czy Matura, to w pewnej części spora niewiadoma.

Kształcenie umiejętności matematycznych to niekoniecznie krótki proces, więc najlepiej uczestniczyć w Pretekstowych Kółkach Matematycznych od jak najmłodszych lat.

Dobrze, jeśli takie kółko prowadzi w okolicy dobry nauczyciel.
W niezbędne e-booki z archiwalnymi zadaniami konkursu, zarówno prowadzący, jak i uczestnicy, mogą zaopatrzyć się przez MatPret.pl (zamówienia zbiorowe to również duże rabaty)[1].
Takiego nauczyciela wspieramy bezpłatnymi Pretekstowymi Spotkaniami Nauczycielskimi[2].

Jeżeli nie ma takiego kółka w okolicy, to można uczestniczyć w ogólnopolskich Pretekstowych Kółkach Matematycznych****, prowadzonych zdalnie (za pośrednictwem Internetu) przeze mnie (autora tekstów i zadań konkursu).

[1]MatPret.pl/ksiazki-i-pomoce-dydaktyczne
[2]MatPret.pl/pretekstowe-spotkania-nauczycielskie

Gdyby nie było możliwości udziału w żadnej z powyższych form PKM, to można indywidualnie rozwiązywać archiwalne zadania konkursowe, bo nasze e-booki zawierają również instrukcje najlepszego wykorzystania ich w takiej właśnie sytuacji.

2.

„Przygotowanie Diagnozujące do matematycznej cześci Egzaminu ósmoklasisty, z oceną szans rekrutacyjnych uczestnika" i „Przygotowanie Diagnozujące do Matury z matematyki, z oceną szans rekrutacyjnych uczestnika" to ogólnopolskie e-korespondencyjno-filmowe cykle odpowiednio dobranych archiwalnych zadań Konkursu Matematyczne Preteksty. Badają one poziom umiejętności matematycznych ósmoklasistów i siódmoklasistów albo maturzystów i bezpośrednich przedmaturzystów oraz rozwijają te umiejętności przed jednymi z najważniejszych egzaminów w ich życiu.

Każdy uczestnik otrzymuje swój indywidualny wynik bieżącej porcji zadań oraz jego porównanie z wynikami wszystkich innych uczestników tego samego poziomu edukacyjnego.

Może on również dostawać porównanie swojego wyniku z wynikami tych wszystkich innych uczestników, których niedługo obejmie rekrutacja na ten sam cel, co jego (klasę o tym samym profilu w tej samej przyszłej szkole ponadpodstawowej albo ten sam kierunek na tej samej przyszłej uczelni wyższej).

Szkoły mogą otrzymywać cykliczne raporty statystyczne dotyczące ich uczniów[*****].

3.

Kulminacją całorocznej pracy nad kształceniem umiejętności matematycznych i sprawdzianem ich opanowania jest udział w kolejnej edycji ogólnopolskiego Konkursu Matematyczne Preteksty.

Najlepiej jest, gdy w bieżącej edycji konkursu bierze udział jak największa liczba uczniów szkoły lub wychowanków przedszkola. Mają oni wówczas możliwość porównania swoich umiejętności z innymi uczestnikami z tej samej placówki. Dodatkowo, przy odpowiednio dużym poziomie uczestnictwa, koordynator z takiej placówki może otrzymać diagnozę poziomu umiejętności swoich podopiecznych oraz jego porównanie z wynikami ogólnopolskimi i regionalnymi. Wszak jest to szczególnie ważne np. na rok przed Egzaminem ósmoklasisty czy Maturą.

W Konkursie Matematyczne Preteksty można również startować indywidualnie, bez przypisania do konkretnej placówki.

9 Zaproszenie

Na podstawie wspomnianych wyżej trzech zadań starałem się pokazać, jak sympatyczna matematyka może tkwić w pozornie prostej treści oraz jak olbrzymi potencjał edukacyjny tkwi w zadaniach Konkursu Matematyczne Preteksty (najczęściej o takich właśnie treściach).

Wszystkich zainteresowanych kształceniem umiejętności matematycznych zapraszam do korzystania z bogactwa projektu Matematyczne Preteksty i życzę dobrej zabawy.

Wałbrzych, 19 lutego 2026 r.

10 Przypisy końcowe

*

Uwielbiam uczyć matematyki i sprawia mi to olbrzymią radość, więc bardzo dziękuję za to Panu Bogu.

Choć nie ma w tym żadnej mojej zasługi, to jednak bardzo cieszę się, że w 1989 roku - w czasach totalnego formalizmu w matematyce szkolnej - niezależnie od innych, wymyśliłem zupełnie nowe podejście do matematyki szkolnej - zadanie o dzielnym traperze Benie Rozumku, które było moim pierwszym zadaniem „pretekstowym". Wywołało ono zachwyt u opiekuna dydaktycznego naszego roku, pana Krzysztofa Omiljanowskiego, i dzięki jego wsparciu wkrótce pojawiły się kolejne zadania tego typu[3].

Niedługo potem moja koleżanka z roku, Małgorzata Mikołajczyk, która zaczęła pracę dydaktyczną w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego, opowiedziała mi o nowopowstałym Stowarzyszeniu Nauczycieli Matematyki. Pojechałem więc na II Krajową Konferencję SNM i zauroczyło mnie ono, więc od tamtej pory jestem jego członkiem.

Okazało się wtedy, że nie jestem jedynym, który stara się zmienić podejście do matematyki szkolnej, więc czułem się jak ryba w wodzie. Tak, jak wielu innych członków SNM, dzieliliśmy się swoimi pomysłami podczas warsztatów i konferencji regionalnych oraz krajowych, więc ja także dzieliłem się swoimi Matematycznymi Pretekstami[4].

Kilka lat później Wacek Zawadowski, Mirek Dąbrowski i Piotrek Piskorski napisali nowy program nauczania matematyki w szkole podstawowej „Matematyka 2001" i zaprosili mnie do tworzenia - pierwszej takiej w Polsce - serii podręczników, zeszytów ćwiczeń, zbiorów zadań i poradników metodycznych. Byłem zachwycony, bo „Matematyka 2001" była cała ... pretekstowa, a wydawcą serii było największe wówczas polskie wydawnictwo edukacyjne, czyli Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, a to oznaczało, że to nie tylko zabawa i sprawa jest poważna.

Ciekawą rzeczą jest również to, że nasz podręcznik do klasy 2 gimnazjum (jeden z elementów przerobionej poprzedniej wersji serii, po zmianie systemu edukacyjnego), podczas Międzynarodowych Targów Książek we Frankfurcie nad Menem zdobył Brązowy Medal Targów oraz tytuł „Najlepszego podręcznika do matematyki w Europie"[5].

W 2013 roku wymyśliłem, wielokrotnie już wspominany, Konkurs Matematyczne Preteksty, a jesienią odbyła się jego pierwsza edycja. Pierwszymi recenzentami zadań konkursowych byli moi przyjaciele ze studiów - Alina i Jacek Świątkowscy z Wrocławia. Alina była zachwycona a Jacek, który zawodowo zajmuje się geometrią, stwierdził, że niektóre zadania są bardzo trudne. I miał rację! Od razu poznać było fachowca, bo potrafił przebić się przez treści pozornie prostych zadań i dostrzec ich głębię. Jak na razie, co roku odbywa się kolejna edycja konkursu.

Ostatnią szkołą, w której uczyłem było Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Wrocławskiej. Choć wyniki Matur moich uczniów, których przygotowywałem od ich pierwszej klasy, przez 3 lata (było to jeszcze liceum po gimnazjum) były bardzo sympatyczne, to zrezygnowałem po kolejnym roku pracy z powodu rodziców kolejnych pierwszaków, którzy uważali, że za dużo wymagam i za surowo oceniam. Najciekawsze było stwierdzenie jednego z rodziców, doktora z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej, który stwierdził, że „z logiki matematycznej wymagam więcej od moich uczniów, niż on od swoich studentów". ◡̈

Ponieważ prowadziłem już wówczas Akademię Umiejętności Matematycznych, to rezygnacja z ALO PWr nie stanowiła problemu z pracą.

[3]Dziś są one zebrane w mojej książce „Matematyczne Preteksty. 50 zadań", dla nauczycieli i rodziców zaangażowanych w edukację matematyczną swoich dzieci.

[4]Później okzało się, że ma to również smutne oblicze, bo moje pomysły pojawiały się w różnych miejscach/podręcznikach, ale bez wspomnienia o ich źródle. Szczytem było wykorzystanie jednego z moich zadań z 1990 roku, bez pytania mnie o zgodę, przez Wrocławskie Centrum Doskonalenia Nauczycieli, podczas diagnozy „Na starcie w szkole ponadpodstawowej" w 2019 roku.

[5]Mogę się jedynie domyślać, dlaczego WSiP nie wykorzystał wówczas tego sukcesu marketingowo.

Kiedyś byłem członkiem Association of Teachers of Mathematics (ATM), a od pewnego czasu jestem również członkiem Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (sem.edu.pl).

Od ponad trzydziestu lat jestem mężem Lucyny, a także tatą naszych dzieci: Kuby, Karoliny, Tomka, Bartka, Marysi, Piotrka i Oli.

Być może również dlatego tematyka rodzin wielodzietnych nie jest mi obca.

**

MatPret.pl/konkurs-matematyczne-preteksty

***

Przykładowy, bezpłatny e-book z zadaniami pierwszego etapu VI edycji Konkursu Matematyczne Preteksty można swobodnie pobrać z MatPret.pl/KMP1819-trening-ebook.pdf .

****

Pretekstowe Kółka Matematyczne dla uczniów szkół podstawowych są opisane na AUM.edu.pl/dla-uczniow-szkol-podstawowych .

Pretekstowe Kółka Matematyczne dla uczniów szkół ponadpodstawowychsą opisane na AUM.edu.pl/dla-uczniow-szkol-srednich .

*****

„Przygotowanie Diagnozujące do matematycznej cześci Egzaminu ósmoklasisty, z oceną szans rekrutacyjnych uczestnika” jest opisane na AUM.edu.pl/egzamin-osmoklasisty-matematyka-przygotowanie-diagnozujace .

„Przygotowanie Diagnozujące do Matury z matematyki, z oceną szans rekrutacyjnych uczestnika” jest opisane na AUM.edu.pl/matura-z-matematyki-przygotowanie-diagnozujace .

POŚWIADCZENIE czasu okazania dokumentu – data pewna

Repertorium A, Nr 2417 /2026
Kancelaria Notarialna w Wałbrzychu, ulica Słowackiego Nr 13/3 notariusza dr Rafała Firleja. ---
Poświadczam, iż w dniu dzisiejszym to jest dnia 16.03.2026 r. (szesnastego marca dwa tysiące dwudziestego szóstego roku) w Kancelarii Notarialnej przy ulicy Słowackiego Nr 13/3 w Wałbrzychu stawił się osobiście przed notariuszem dr Rafałem Firlejem: ---
Pan Marek [redacted] **MATEJUK, syn** [redacted], posiadający PESEL [redacted], zamieszkały: 58-3[redacted], którego tożsamość ustaliłem na podstawie dowodu osobistego serii i numer [redacted]. ---

Poświadczam, iż Pan Marek MATEJUK w dniu 16.03.2026 roku o godzinie 12:35 okazał niniejszy podpisany przez siebie egzemplarz artykułu pod tytułem „Wielopoziomowe zadania z lusterkiem, czyli kształcenie umiejętności matematycznych i nie tylko” wraz z oświadczeniem dotyczącym praw autorskich stawającego. ---

P o b r a n o: ---

- zgodnie z §13 pkt. 3 Rozp. Min. -------
Sprawiedliwości z dnia 28.06.2004 roku
w sprawie taksy notarialnej, kwotę --------------------------------------90,00 złotych

- podatek od towarów i usług VAT /23 % /
na podstawie ustawy z dnia 11.03.2004 roku
z późn. zm. w kwocie --20,70 złotych

Razem: 110,70 złotych

RAFAŁ FIRLEJ NOTARIUSZ W WAŁBRZYCHU

dr Rafał Firlej
NOTARIUSZ

KANCELARIA NOTARIALNA
dr Rafał Firlej
58-300 Wałbrzych, ul. Słowackiego 13/3
tel./fax 074 849 90 09
NIP: 884-122-92-60